

# Table des matières.

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>0.1 introduction</b>	<b>2</b>
<b>0.2 Historique</b>	<b>3</b>
<b>I Les effets de marées. (Théorie statique)</b>	
1.1 Le système Terre-Lune	4
1.1.1 Les potentiels	4
1.1.2 Déformation Terrestre	5
1.2 Le système Terre-Lune-Soleil	8
1.2.1 Stabilité du système	8
1.2.2 Quadrature et sysygie	9
1.2.3 Conséquences	10
1.2.4 Marées semi-diurnes	12
1.2.5 Marée diurne	12
1.3 L'echèque de la théorie statique	14
<b>II Les ondes de marées (Théorie dynamique)</b>	
2.1 Nécessité d'une théorie dynamique, hypothèses fondamentale	15
2.1.1 Principe des oscillations forcées.	15
2.1.2 Principe de superposition des petits mouvements.	15
2.2 Théorie dynamique des marées	16
2.2.1 Le cas de deux corps	16
2.2.2 Le cas Terre-Lune-Soeil	19
2.3 Les marées équinoxiales e France	21
2.4 Les lignes cotidiales et points amphidomiques	22
2.5 Dissipation d'énergie et conséquences	23
<b>Conclusion</b>	<b>25</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>25</b>

## 01. Introduction.

Parmi les phénomènes de la nature, la marée est l'un des plus majestueux par son ampleur et par sa puissance; l'un des plus surprenants par sa régularité et par la discrétion de ses causes. On comprend sans peine non seulement qu'il se soit imposé à l'attention des navigateurs mais encore qu'il ait, depuis la plus lointaine antiquité, suscité les recherches des savants les plus émérites.

Cependant, comme il participe à la fois de la mécanique céleste en raison des forces qui l'engendrent, et de la mécanique des fluides par suite du milieu sur lequel elles s'exercent, la connaissance et l'explication de ce phénomène n'ont pu se préciser qu'au fur et à mesure du progrès des sciences mathématiques.

Le but primitif de ces études était de s'intéresser particulièrement aux marées existant aux voisinages des côtes; le problème posé étant alors celui de la prédiction du phénomène en un lieu donné: il est théoriquement résolu de manière théorique, mais la simulation numérique est en proie à ses propres limites ainsi qu'à une connaissance imparfaite des reliefs sous-marins.

Les fondements de ces approches informatiques paraissent définitives mais ces points de vue sont très empiriques et font appel aux observations "in situ".

Le deuxième point de vue, procède d'un esprit de synthèse. Il s'agit de rechercher l'explication théorique des causes particulières qui font varier en chaque point la physionomie du phénomène, de découvrir comment la marée se propage à travers mers et océans et quelles influences viennent modifier son caractère.

Malgré un nombre colossal d'observations passées, on est bien loin de pouvoir prédire les marées actuelles d'une manière purement théorique. Ce désarroi est encore plus flagrant si il s'agit de les déterminer pour un point quelconque du globe par la seule théorie.

Seule l'observation minutieuse et laborieuse permet d'anticiper localement les marées.

Ainsi on observe, sur la côte atlantique deux marées hautes et basses par jour; une prépondérance des marées dites semi-diurnes par rapport aux diurnes.

Mais ces phénomènes ne sont pas valables partout au monde.

Par exemple:

- \* dans l'océan pacifique nord, un système diurne, de l'Amérique à l'Asie.
- \* dans l'océan indien, un système semi-diurne limité au sud par une bande joignant l'Australie à la Somalie.

Concernant les amplitudes, la marée diurne est presque toujours faible, dépassant rarement un mètre mais atteignant exceptionnellement 11 m au cap Astronomique (plus forte marée diurne connue). La marée semi-diurne a ainsi presque partout une prépondérance marquée.

Les plus faibles amplitudes s'observent dans les mers presque fermées; insensible en mer noire et de 10 à 20 cm sur les côtes méditerranéenne française.

Mais aussi au cœur des océans, comme le montre Tahiti (0,4 m) et la Réunion (1 m).

## 02. Historique.

Grecs et romains furent les premiers à étudier les marées, poussés par les nécessités de la guerre et du commerce sur les côtes de l'atlantique, en Europe, Afrique, mer rouge et océan indien où celles-ci sont importantes.

Aristote, vers 350 avant J-C attribua les marées à la lune.

La relation entre l'âge de la lune et l'amplitude de la marée, les effets de la déclinaison de l'astre, mais aussi la concordance de leurs variations diurnes, semi-diurnes et mensuelles avec les mouvements de la lune et du soleil furent observés bien avant le début du XVIIème siècle où Képler émit le premier l'hypothèse que les eaux de mer devaient toujours se diriger vers la lune.

Il dû abandonner sa théorie devant les critiques de Galillée qui attribuait les marées au mouvement de translation et de rotation de la terre.

Ce fut Newton qui, en 1687, posa les fondements véritables de toutes les recherches ultérieures en rattachant la théorie des marées à son grand principe de la gravitation universelle. Il admet que la cause des marées réside dans l'attraction exercée sur les molécules des océans par la lune et le soleil, seuls astres à considérer en raison de leur proximité où de leur masse.

Il proposa la théorie statique, qui suppose que la surface des mers est une surface équipotentielle, mais aboutit à un échec.

La mécanique des fluides était trop peu avancée à son époque pour qu'il puisse donner une théorie plus approfondie des marées.

Il fallut attendre près d'un siècle pour qu'un progrès appréciable soit réalisé dans l'explication du phénomène.

Laplace, au quatrième livre de la mécanique céleste envisagea le problème sous son aspect dynamique.

La théorie dynamique qu'il fut le premier à formuler et qui est à la base de tous les développements ultérieurs s'appuie sur deux principes:

- celui des oscillations forcées
- celui de la superposition des petits mouvements

L'application de ces principes permis à Laplace d'établir une expression de la dénivellation et de la distance de l'astre.

Cette formule dite formule de Laplace admet que les amplitudes sont proportionnelles à leur valeurs théoriques et que les marées correspondantes sont déphasées par rapport à la marée théorique.

Après Laplace, Whewell envisage la marée sous la forme d'ondes parcourant les océans.

Airy reprit cette conception et étudia la propagation des ondes-marées notamment dans les courant et les rivières en tenant compte des frottements.

La formule de Laplace se prête mal aux prédictions des marées à forte inégalité diurne. Pour résoudre ce problème, lord Kelvin, en 1870, décomposa le potentiel de la force génératrice de la marée en une somme de termes périodiques.

Il inventa une machine mécanique, le Tide Prédicteur, pour faire la somme de tous les termes et tracer la courbe de marée.

A la fin du XIXème siècle, la théorie dynamique fut reprise par Poincaré qui indiqua les méthodes de calcul au moyen desquelles on pourrait obtenir la solution du problème des marées sur un globe où les océans sont séparée par des continents.

Hough, astronome au Cap, compléta la théorie de Laplace en déterminant la nature et la période des oscillations libres des océans.

Enfin, aux Etats-Unis, Rollin A. Harris (1897), montra l'importance des phénomènes de résonances dans la formation des marées et parvint à expliquer de manière satisfaisante les particularités du phénomène dans divers ports du globe.

# Chapitre I

## Les effets de marée. (Théorie statique).

### 1.1 Le système Terre-Lune.

#### 1.1.1 Les potentiels.

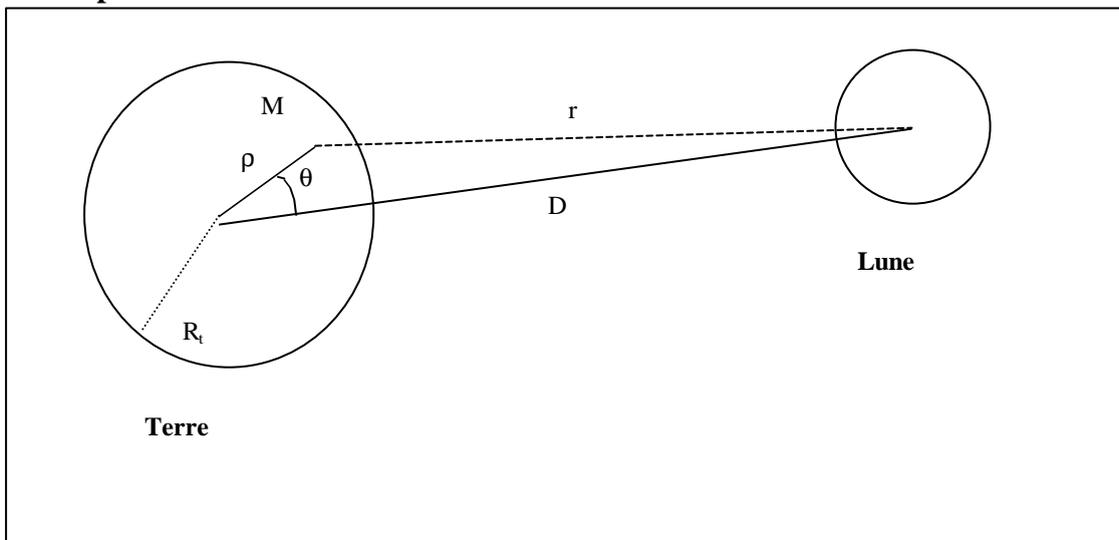


fig.1

$G$  est la constante de gravitation,  $M_T$  la masse de la Terre,  $M_L$  la masse de la Lune,  $D$  la distance Terre-Lune

Les expressions des potentiels de gravitation qui s'appliquent à un point  $M$  de la Terre sont:

$$\text{Le potentiel dû à la lune } V_L = -G \frac{M_L}{r}$$

$$\text{Le potentiel dû à la Terre } V_t = -G \frac{M_t}{\rho}$$

Il convient d'ajouter le potentiel d'entraînement dû à l'attraction de la Lune sur le référentiel de la Terre qui l'accélère et le rend donc non galiléen:

$$V_e = G \frac{M_L}{D^2} \rho \cos \theta$$

La somme des potentiels est

$$V_{\text{tot}} = -G \frac{M_L}{r} - G \frac{M_t}{\rho} + G \frac{M_L}{D^2} \rho \cos \theta \quad (1)$$

### 1.1.2 Déformation terrestre.

#### i. Hypothèses.

L'hypothèse la plus simple consiste à considérer que la surface des mers est à tout instant en équilibre sous l'action des forces auxquelles elle est soumise.

On considère que  $V_{\text{tot}}$  est une équipotentielle à la surface des mers. Une autre hypothèse simplifiant les calculs est de supposer que la Terre est sphérique et entièrement recouverte d'une couche d'eau liquide.

De plus nous considérerons que la Terre est immobile et que l'on ne prend pas en compte le mouvement des particules.

Nous avons aussi:  $r = \left(1 + \frac{\rho^2}{D^2} - 2 \frac{\rho}{D} \cos \theta\right)^{\frac{1}{2}}$

or  $\rho \leq 6400 \text{ km}$  et  $\langle D \rangle \approx 360\,000 \text{ km}$ .

Nous pouvons donc effectuer un développement limité du terme  $r$  en  $\frac{\rho}{D} \approx \varepsilon$

Alors  $\frac{1}{r} = \left(1 + \frac{\rho^2}{D^2} - 2 \frac{\rho}{D} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{D^2} - 2 \frac{\rho}{D} \cos \theta\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\rho^2}{D^2} - 2 \frac{\rho}{D} \cos \theta\right)^2 + \varepsilon^2$

en ne conservant que les termes en au plus  $\frac{\rho^2}{D^2}$ , et en utilisant (1) on obtient:

$$V_{\text{tot}} = -G \frac{M_L}{D} + G \frac{M_L}{2D^3} \rho^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) - G \frac{M_t}{\rho} = \text{cte}$$

ou encore

$$G \frac{M_L}{2D^3} \rho^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) - G \frac{M_t}{\rho} = \text{cte}' \quad (2)$$

avec  $\text{cte}' = \text{cte} + G \frac{M_L}{D}$

En l'absence d'astre perturbateur; la couche liquide entourant le globe serait en équilibre par rapport à ce dernier sous l'action de la seule pesanteur.

$\rho = R_T$  est la surface d'équilibre.

En présence de la Lune, il y a des déformations dues aux effets de marée, de hauteur notée  $z$ . Alors  $\rho = R_T + z$  définit la surface libre; tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de la surface d'équilibre (i.e.  $\rho = R_T$ )

Or  $z$  est de l'ordre de quelques mètres et  $R_T = 6400$  Km d'où  $\frac{z}{R_T} \approx \varepsilon$

On peut donc effectuer un développement limité de (2) au premier ordre en  $\frac{z}{R_T}$

Dans ces conditions  $\rho^2 = R_T^2 + 2 R_T z$  et  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_T} \left( 1 - \frac{z}{R_T} \right)$

On obtient 
$$A = z \left[ \left( 1 - 3 \cos^2 \mathbf{q} \right) \frac{GM_L R_T}{D^3} + \frac{GM_T}{R_T^2} \right] - 3 \frac{GM_L R_T^2}{2D^3} \cos^2 \mathbf{q} \quad (3)$$

avec  $A = \text{cte}' + \frac{GM_T}{R_T} - \frac{GM_L R_T^2}{2D^3}$

On a de plus  $\frac{GM_L R_T}{D^3} \frac{R_T^2}{GM_T} = \frac{M_L R_T^3}{M_T D^3}$  avec  $M_T = 81 M_L$ ,  $R_T = 6400$  Km et

$D = 690\,000$  Km. Vu ces valeurs, on peut négliger

$$(1 - 3 \cos^2 \theta) \frac{GM_L R_T}{D^3} \text{ devant } \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

d'où 
$$A = z \frac{GM_T}{R_T^2} - 3 \frac{GM_L R_T^2}{2D^3} \cos^2 \theta$$

en fin 
$$z = B + C \cos^2 \theta \quad (4)$$

avec  $B = A \frac{R_T^2}{GM_T}$  (5) et  $C = 3 \frac{M_L R_T^4}{2D^3 M_T}$  (6)

Pour déterminer les constantes, nous écrivons que le volume de la couche liquide qui recouvre le globe est invariable ou encore que le volume compris entre la surface libre et la surface d'équilibre est nulle.

ii. Forme de la surface libre.

L'hypothèse vue précédemment implique:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi R_T^2 \sin \theta d\theta d\phi z = 0$$

$$\text{d'où } \int_0^\pi R_T^2 \sin \theta 2\pi(B + C \cos^2 \theta) d\theta = 4\pi B R_T^2 + \frac{4}{3}\pi R_T^2 C = 0$$

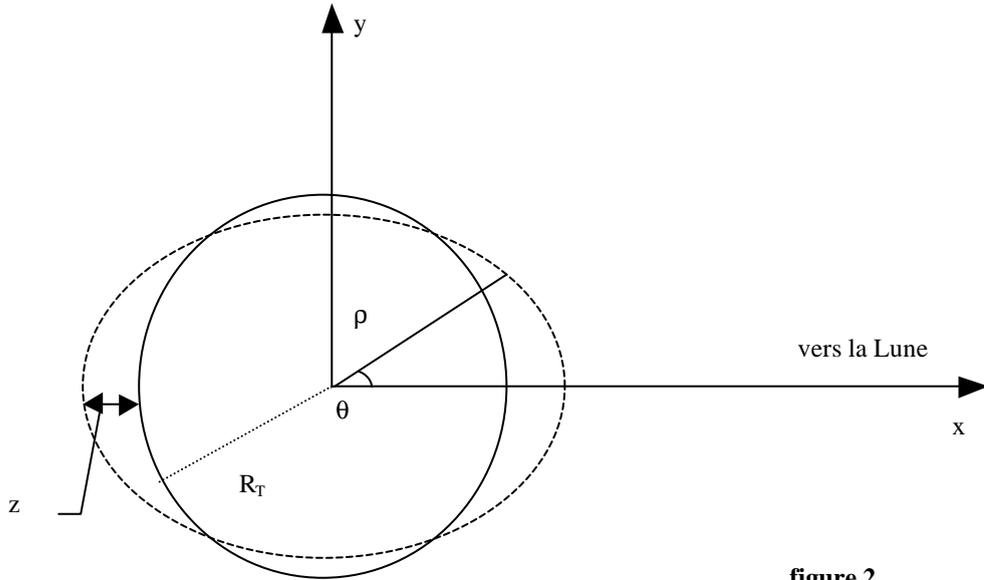
on obtient:  $C = -3B$  (7)

$$\text{d'où en utilisant (5) et (6) : } A = \frac{-M_L G R_T^2}{2D^3}$$

d'après (4) et (7) ;  $z = B(1-3\cos^2\theta)$

$$z = z_0(3\cos^2\theta - 1) \quad (8)$$

$$\text{avec } z_0 = -B = \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^4}{2D^3}$$



**figure 2**

$$\text{On a } x^2 + y^2 = \rho^2 = (z + R_T)^2 = R_T^2 + 2z R_T$$

avec les mêmes approximations que pour (3).

$$\text{On peut exprimer } \cos \theta = \frac{x}{R_T + z}$$

$$z = z_0(3\cos^2\theta - 1) = z_0 \left( \frac{3x^2}{(M_T + z)^2} - 1 \right) \approx z_0 \left( \frac{3x^2}{M_T^2} - 1 \right)$$

en fin 
$$x^2 + y^2 = R_T^2 + 2z_0 R_T \left( \frac{3x^2}{M_T^2} - 1 \right)$$

$$x^2 \left( 1 - \frac{6z_0}{R_T} \right) + y^2 = R_T^2 \left( 1 - \frac{2z_0}{R_T} \right)$$

On obtient finalement, l'équation de la forme de la surface libre:

$$\frac{x^2}{1 + \frac{4z_0}{R_T}} + \frac{y^2}{1 - \frac{2z_0}{R_T}} = R_T^2$$

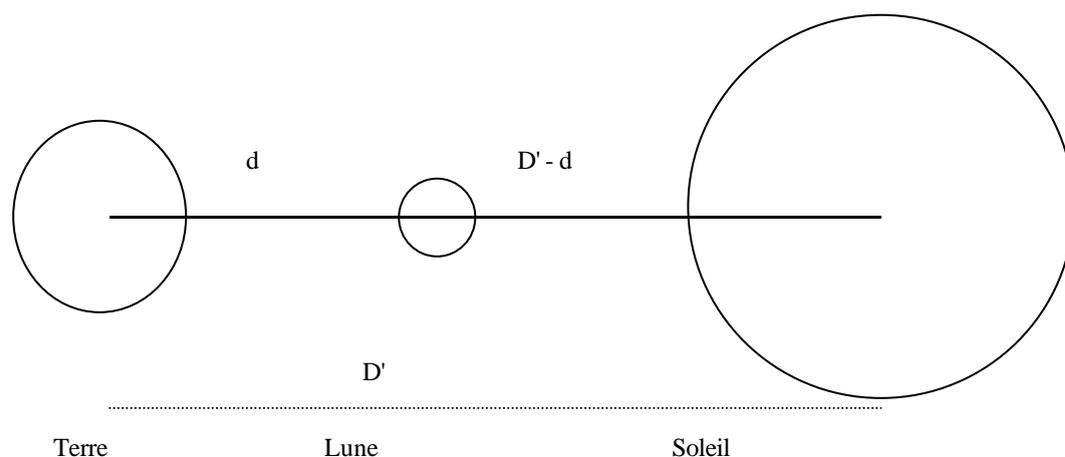
C'est une ellipse dont le grand axe est dirigé vers la lune; les déformations dues aux effets de marée sont symétriques par rapport aux axes de l'ellipse. La forme de la surface libre est représentée en tirets sur la figure 2. Les différences de hauteur avec la surface d'équilibre (surélévation et dépression) constituent ce qu'on appelle improprement "le bourrelet liquide". Cette forme est due aux molécules d'eau qui se rendent vers la zone de la Terre qui est à l'opposé et face à l'astre. Il ne s'agit donc pas d'un soulèvement des masses d'eau. Bien que se renflement soit de l'ordre du mètre cela correspond à une masse considérable d'eau.

**Remarque** sur l'influence du bourrelet liquide.

On n'a pas tenu compte du potentiel du bourrelet liquide. La présence de celui-ci augmente d'environ 10% la hauteur de la marée statique.

## 1.2 Le système Terre-Lune-Soleil.

### 1.2.1 Stabilité du système.



Nous savons que  $d \ll D'$  de plus  $M_t = 6.10^{24} \text{ Kg} \ll M_s = 2.10^{30} \text{ Kg}$

La configuration dans laquelle le Soleil risque le plus de "capter" la Lune est lorsque celle-ci est la plus proche ou encore sur l'axe Terre-Soleil et entre les deux.

L'accélération différentielle produite par le perturbateur (Soleil) est

$$G \frac{M_s}{(D'-d)^2} - G \frac{M_s}{D'^2} \approx 2G \frac{M_s d}{D'^3}$$

Le satellite est arraché au primaire (Terre) si cette accélération est supérieure à celle de gravitation de la Terre  $GM_T d^{-2}$

Soit un

$$d_{\text{limite}} = \sqrt[3]{\frac{M_T}{2M_s}} D'$$

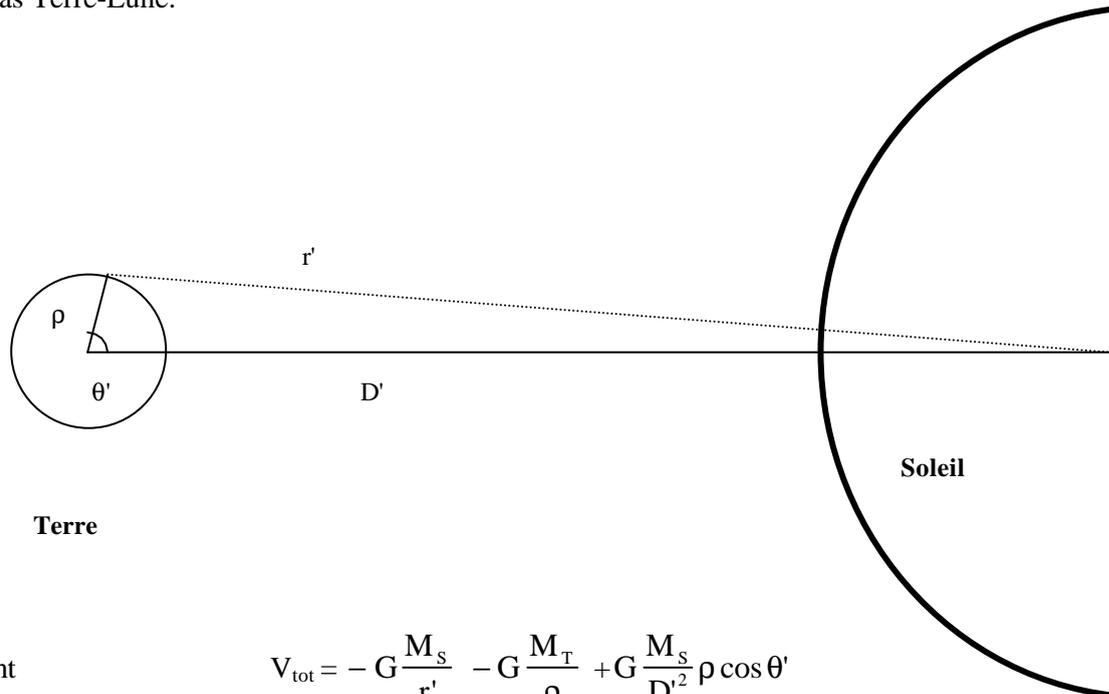
avec  $D' = 1,49 \cdot 10^{11} \text{m}$

La Lune serait donc arrachée de son orbite par le Soleil si elle se trouvait au moins à 1 705 000 Km de la Terre, ce qui est bien supérieur au rayon maximum Terre-Lune de 406 000 Km.

### 1.2.2 Quadratures et syzygies.

On considère tout d'abord le système Terre-Soleil.

L'établissement du potentiel total ainsi que la forme de la surface libre se fait de la même manière que dans le cas Terre-Lune.



On obtient

$$V_{\text{tot}} = -G \frac{M_s}{r'} - G \frac{M_T}{\rho} + G \frac{M_s}{D'^2} \rho \cos \theta'$$

Or  $\rho \leq 6400 \text{ Km}$  et  $D' = 1,49 \cdot 10^{11} \text{m}$ , on peut donc effectuer un développement limité du terme  $r'$  en  $\rho/D'$

On obtient un analogue à la relation (3):

$$A' = z \left[ (1 - 3 \cos^2 \theta') \frac{GM_s R_T}{D'^3} + \frac{GM_T}{R_T^2} \right] - 3 \frac{GM_L R_T^2}{2D'^3} \cos^2 \theta'$$

or  $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$ ,  $M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$  et  $R_T = 6400 \text{km}$ .

Le rapport  $\frac{GM_s R_T}{D^3} \frac{R_T^2}{GM_T} \frac{R_T^3}{R_T^3} = \frac{\rho_s}{\rho_T} \frac{R_s^3}{D^3}$  est faible puisque  $\rho_T = 5.5 \text{ kg/m}^3$  et  $\rho_s \approx 1 \text{ kg/m}^3$  et  $R_s = 700\,000 \text{ km}$ .

On peut donc négliger le premier terme face au second.

En faisant les mêmes hypothèses que dans le cas du système Terre-Lune, on montre que la surface libre est une ellipsoïde dont le demi-grand axe est dirigé vers le soleil.

A l'aide des expressions  $z$  on calcule la hauteur maximale des marées produites par la Lune puis par le Soleil sur la Terre:

$$z_{\text{Lune} \rightarrow \text{Terre}} = 0,35 \text{ m}$$

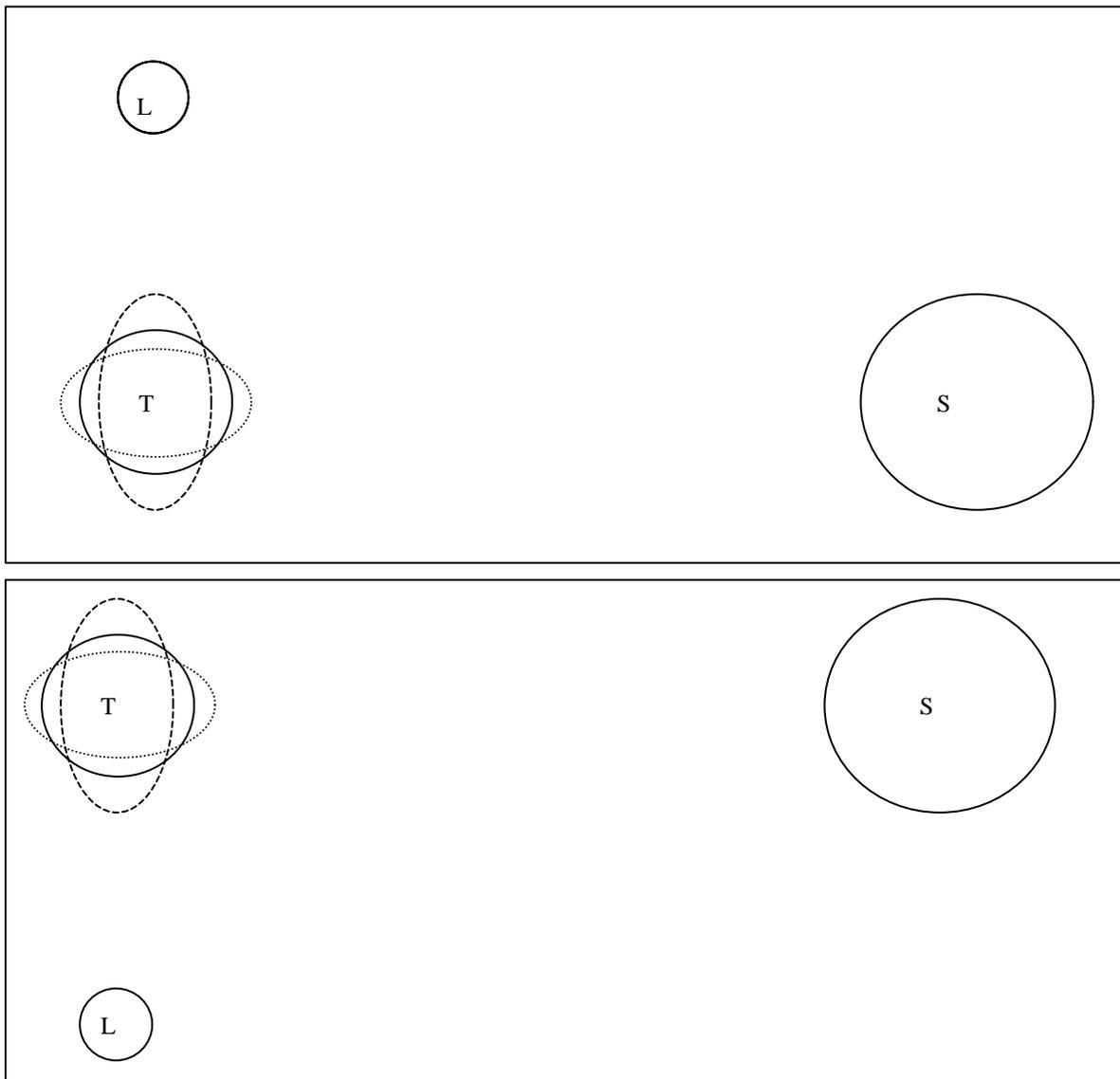
$$z_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}} = 0,16 \text{ m}$$

On constate que l'influence du Soleil est moindre que celle de la Lune.

Pour étudier l'action conjuguée du Soleil et de la Lune sur la Terre, on considère la superposition des effets des systèmes Terre-Lune et Terre-Soleil.

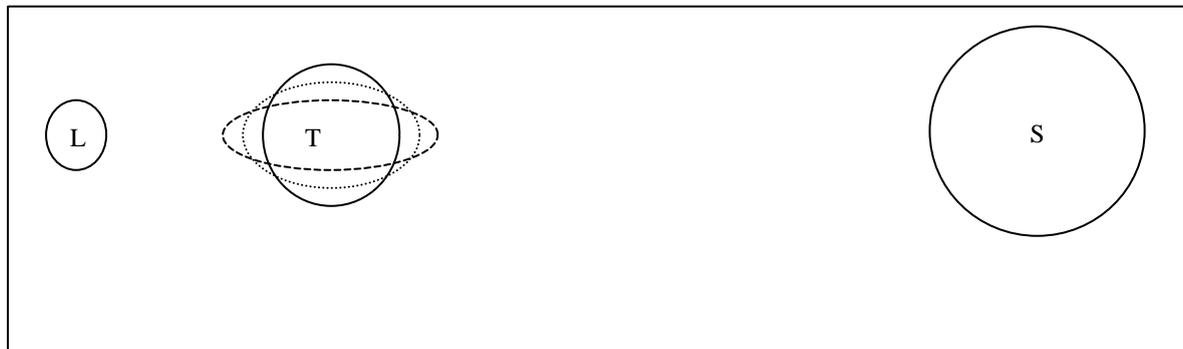
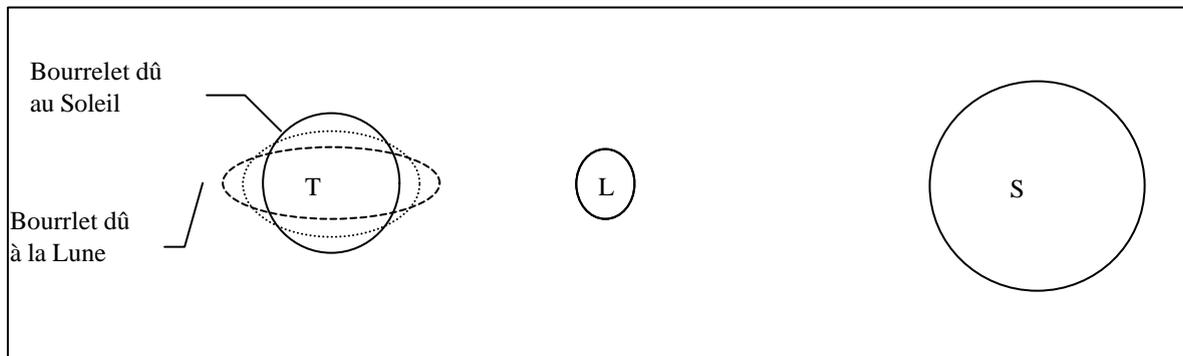
Nous allons étudier deux types de configurations bien particulières:

i      Quadratures.



Cette configuration n'est possible que dans deux cas; lorsque l'angle  $(STL) = -\pi/2$  ou  $\pi/2$ . Les astres sont dans deux méridiens terrestres perpendiculaires. Alors, les grands axes des deux ellipsoïdes sont perpendiculaires et donc les effets conjugués de la Lune et du Soleil se retranchent. Ces situations correspondent du premier  $(\pi/2)$  et du dernier  $(\pi/2)$  quartier de Lune; on a alors de faibles marées dites marées de mortes eaux.

ii. Syzygies.



Là aussi deux seules configurations sont possibles:  
 $(STL) = 0$  ou  $\pi$ .  
 Les grands axes des ellipses sont alignés. Les effets s'ajoutent, on a de fortes marées dites marées de vives eaux (environ tous les 15 jours). On se trouve à une nouvelle Lune  $((SLT)=0)$  où à la pleine Lune  $((STL)=\pi)$ . Les trois astres n'étant pas nécessairement alignés mais dans le même plan méridien terrestre.

**1.2.3 Conséquences.**

La théorie statique considérant la Terre fixe, il faut recréer le mouvement apparent de la Lune et du Soleil dans le repère géocentrique.

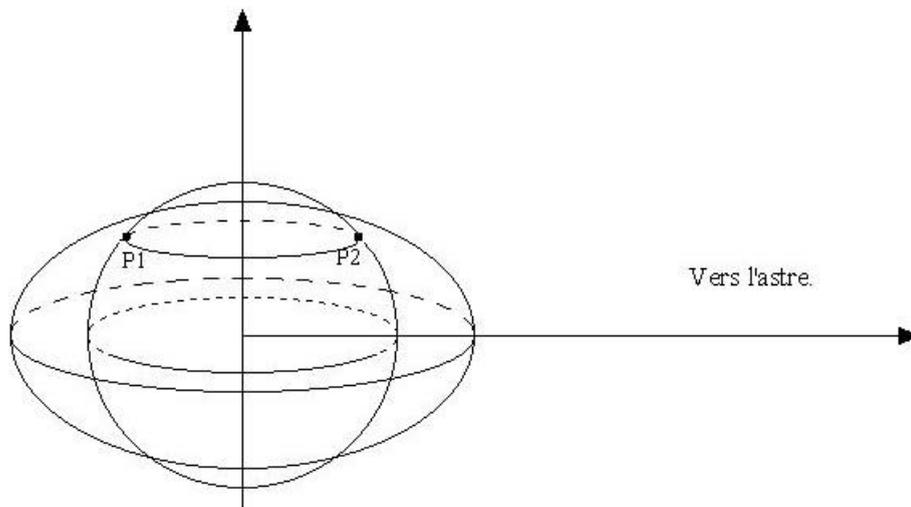
Dans le repère héliocentrique, la Lune tourne en 27 jours  $\frac{3}{4}$  autour de la Terre qui tourne sur elle-même en 24h.

La distance Terre-Lune est  $D$  et celle Terre-Soleil est  $D'$ . Celles-ci restent invariantes d'un repère à l'autre.

Dans ce repère géocentrique, le mouvement apparent du Soleil est donc de 24h et celui de la Lune de 24h50.

#### 1.2.4 Marées semi-diurnes.

Supposons que l'astre soit situé dans le plan de l'équateur; la Terre faisant un tour sur elle-même en 24h; la marée solaire  $S_2$  aura une périodicité de 12h exactement. En effet, la forme de la surface libre étant une ellipse dont le grand axe est dirigé vers l'astre. Le point  $P$ , qui est initialement en  $P_1$  se trouvera 12h plus tard en  $P_2$ , position où le renflement est exactement le même pour un observateur lié à la Terre. En  $P_1$  et  $P_2$ , la marée est d'amplitude maximale et identique.



La marée  $S_2$  est alors semi-diurne, puisque sa période est égale à une demi-rotation terrestre.

La Lune ayant un mouvement apparent de 24h50.

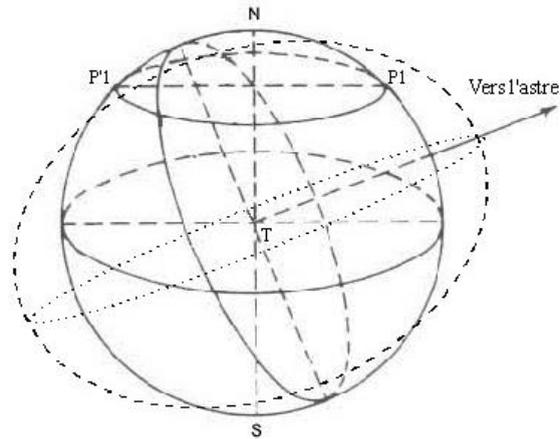
La marée  $M_2$  due à la Lune a une périodicité de 12h25, elle est aussi semi-diurne.

#### 1.2.5 Marée diurne.

Supposons que l'astre n'est pas dans le plan de l'équateur. Ainsi le grand axe de l'ellipsoïde fait un angle différent de  $\pi/2$  avec l'axe des pôles.

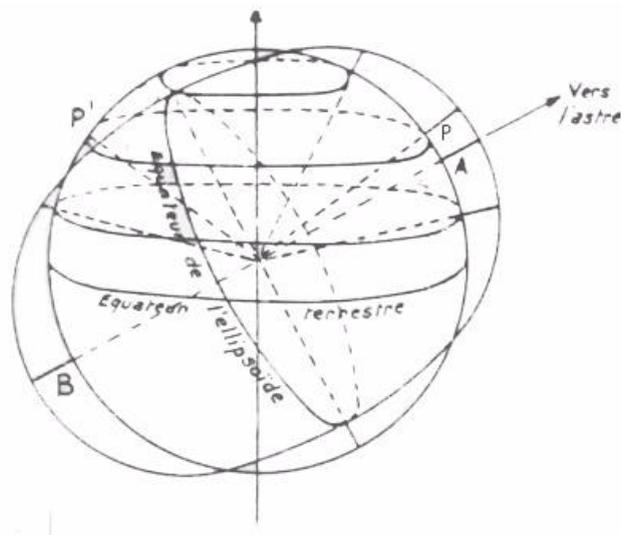
Donc les maximums de même amplitude des marées se produisent à des latitudes symétriques par rapport à l'équateur.

Un point  $P_1$  à une latitude  $L_1$  voit une marée de hauteur  $z_1$  au temps  $t_0$ ; 12h plus tard, toujours à  $L_1$  mais en  $P'_1$ , il verra une marée de hauteur  $z'_1$  différente de  $z_1$ .



Par contre, les minimums d'amplitudes des marées en deux points à la même latitude sont égaux. A la périodicité semi-diurne des marées se superpose une inégalité diurne sur les maximums de la marée. On peut donc dire que les marées semi-diurnes ne disparaissent jamais alors que les marées à inégalité diurnes disparaissent lorsque l'astre est dans le plan de l'équateur. La modulation des marées dues respectivement à la différence des périodes de rotation apparente de la Lune et du Soleil autour de la Terre engendre, par effet de battement, des périodes plus longues de l'ordre de 14 jours.

### **Pleines mers.**



Nous nous replaçons dans le repère géocentrique exposé précédemment, l'ellipsoïde représentant la surface libre tourne avec l'astre autour de la Terre supposée immobile en un jour de l'astre (24h50 pour la Lune, 24h pour le Soleil). en un lieu P, il y a pleine mer quand la distance zénithale est minimale, c'est à dire quand l'astre passe au méridien. Pour les points d'un même méridien, les pleines mer sont inégales, la plus grande a lieu aux point A et B.

### **Basses mers.**

Il y a une basse mer en un lieu ou l'équateur de l'ellipsoïde y passe, c'est à dire quand l'astre est à l'horizon.

Les deux basses mers d'un même jour sont égales et les même en tout point.

### 1.3 L'échec de la théorie statique.

Comme nous l'avons vu précédemment, la hauteur du niveau de la mer dûe à la Lune sera au maximum de 35cm, il peut s'y ajouter au maximum 16cm dus au Soleil; ce qui fait 51cm. Nous sommes loin des 15m constaté au mont St Michel.

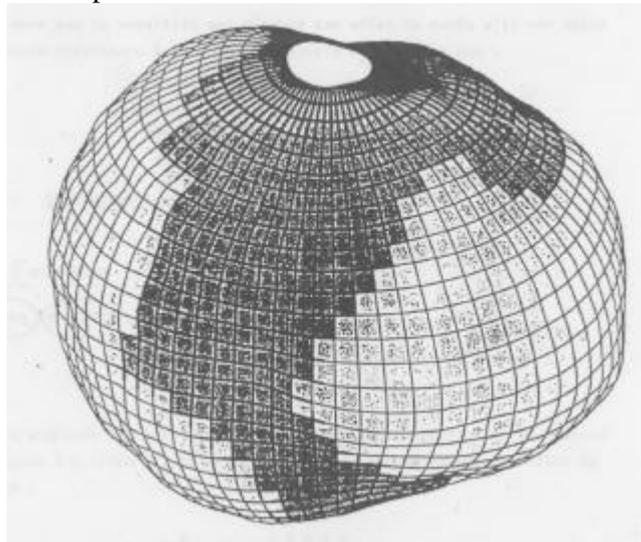
De plus l'inégalité diurne devrait être nulle dans certaines régions équatoriales où elle est en fait très accentuée, et très forte sur les côtes de l'Europe à cause de leur latitude où elle est à peine sensible.

Enfin ont a constaté un retard variable entre la grande marée et la syzygie qui la produit (âge de la marée). Mais aussi un retard de la pleine mer par rapport au passage de la Lune au méridien (établissement du port).

L'hypothèse que nous avons faite, considérant que la surface des mers était à tout instant en équilibre sous l'action des forces qui la sollicitaient est inconciliable avec l'inertie des molécules liquide et la rapidité du mouvement de l'astre.

En dehors de cette hypothèse même, une des raisons du désaccord avec la réalité réside dans le fait que la théorie statique néglige l'existence des continents. De plus la surface de la Terre est loin d'être sans asperités et parfaitement sphérique.(Comme l'illustre la photographie suivante).

La théorie statique des marées peut être considérée tout au plus comme donnant l'allure générale du phénomène, mais elle est absolument insuffisante pour des applications pratiques, c'est-à-dire pour conduire à des prédictions acceptables de la marée.



*Cette image relativement récente à été obtenu par mesure des variations de l'orbite de satellites météorologiques, celles-ci ont été exagérées pour un meilleur rendu.*

## Chapitre II

# Les ondes de marées (Théorie dynamique).

### 2.1 Nécessité d'une théorie dynamique, Hypothèses fondamentales.

L'échec de la théorie statique des marées, lorsque l'on compare à l'observation les déductions que l'on en tire, montre que l'hypothèse initiale, c'est à dire que la couche liquide prend à chaque instants la figure d'équilibre correspondant à la position de l'astre à cet instant, est inconciliable avec la rapidité du mouvement de l'astre.

Les particules liquides, sollicitées constamment vers une position d'équilibre, ont tendance à la dépasser et à accomplir des oscillations réglées par les lois de la dynamique. Le problème doit donc être abordé sous son aspect dynamique: la théorie correspondante doit tenir compte de l'état de mouvement des particules liquides et prendre en considération les forces d'inerties.

On montre en effet que les phénomènes de marée entretiennent dans les océans un phénomène ondulatoire dans lequel les particules décrivent des trajectoires sensiblement elliptiques situées dans un plan verticale et très allongé: *ce déplacement verticale constitue la marée* alors que le *déplacement horizontale est le courant de marée*.

L'existence de mouvement oscillatoire suffit à infirmer la théorie de l'équilibre.

#### 2.1.1 Principe des oscillations forcées.

Sous l'influence d'une force perturbatrice de l'équilibre et si cette force est rigoureusement périodique, le mouvement de la mer est périodique et de même période que l'astre.

#### 2.1.2 Principe de superposition des petits mouvements.

Selon ce principe "le mouvement total d'un système soumis à de très petites forces est la somme des mouvements partiels que chaque force lui imprime" (P.S.Laplace).

Il correspond à chacun d'eux une marée partielle de même période et la somme de ces mouvements représente la marée.

Une force périodique non seulement fait naître une oscillation de même période, mais encore engendre des oscillations supérieures dont les périodes sont des sous multiples de celle de l'oscillation fondamentale.

## 2.2 Théorie dynamique des marées.

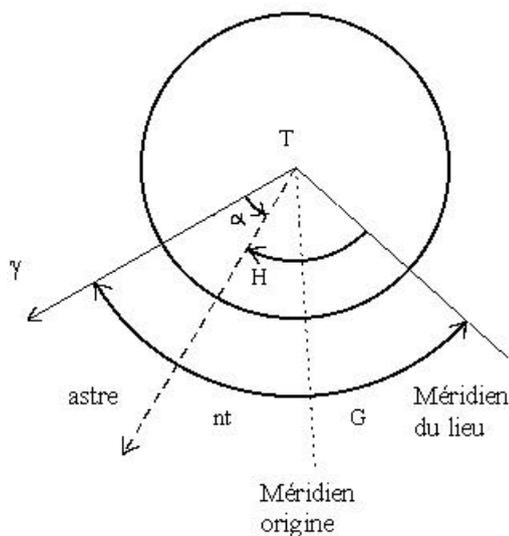
La théorie dynamique de Laplace découle immédiatement des principes précédents.

Il est en effet possible de décomposer la forme  $z$  de la surface libre causée par un perturbateur sur la Terre en une série illimitée de termes rigoureusement périodiques dont les fréquences dépendent de la rotation terrestre et des caractéristiques du mouvement de l'astre.

La hauteur de l'eau sera obtenue en faisant la somme de tous ces termes dépendent des conditions hydrauliques, donc de la forme arbitraire des continents et des irrégularités de la profondeur des océans, c'est-à-dire du lieu géographique.

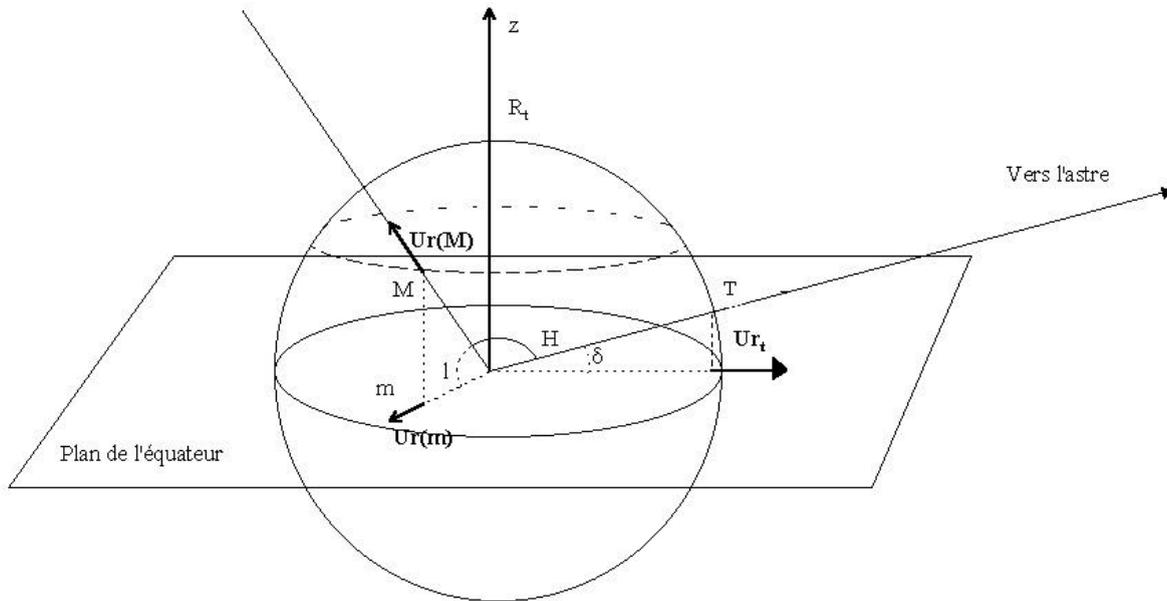
### 2.2.1 Le cas à deux corps.

La Lune se déplaçant autour de la Terre, pour étudier la variation de hauteur d'eau résultante de la force génératrice des marées représentée par l'ellipsoïde, on introduit l'angle horaire  $H$  de la Lune qui varie donc proportionnellement au temps.



Si l'on veut faire apparaître la rotation de la Terre sur elle-même, on écrit  $H = (n t - G) - \alpha$  avec  $n$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre,  $t$  terme sidérale du méridien origine et  $\alpha$  l'ascension droite de

l'astre.



où  $\delta$  est la déclinaison de l'astre et  $l$  la latitude du point.

On a:

$$\mathbf{OM} = R_T \cdot \mathbf{U}_r(M) = R_T [\sin l \mathbf{U}_z + \cos l \mathbf{U}_r(\mathbf{m})]$$

$$\mathbf{OT} = R_T \mathbf{U}_r(T) = R_T [\sin \delta \mathbf{U}_z + \cos \delta \mathbf{U}_r(\mathbf{T})]$$

soit  $\theta = l - \delta$

$\theta$  représente la différence de latitude entre la latitude de T et celle de M.

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} \cdot \mathbf{OT} &= R_T^2 \cdot \cos \theta = R_T^2 [\sin l \cdot \sin \delta + \cos l \cdot \cos \delta \cdot \mathbf{U}_r(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{U}_r(\mathbf{T})] \\ &= R_T^2 [\sin l \cdot \sin \delta + \cos l \cdot \cos \delta \cdot \cos H] \end{aligned}$$

on obtient  $\cos \theta = \sin l \cdot \sin \delta + \cos l \cdot \cos \delta \cdot \cos H$

Les variations de  $z$  étant très faible devant  $R_T$  on considère que  $\rho$  est constant.

On peut donc écrire l'équivalent de (8) sous la forme:

$$z = \frac{R_T^4}{2\Delta^3} \frac{M_A}{M_T} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

avec  $M_A$  la masse de l'astre et  $\Delta$  la distance entre le centre de la Terre et de l'astre.

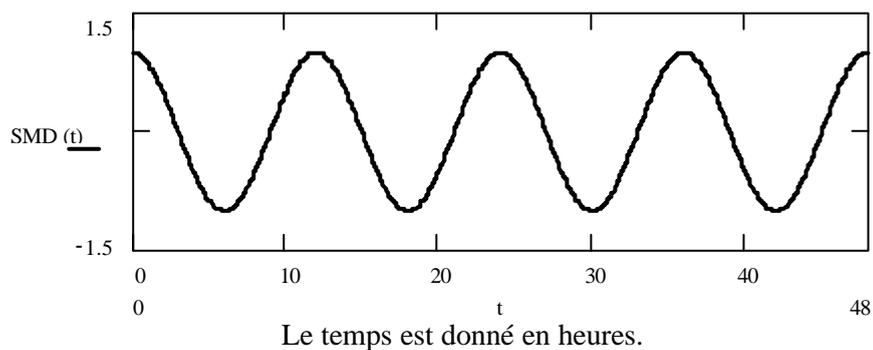
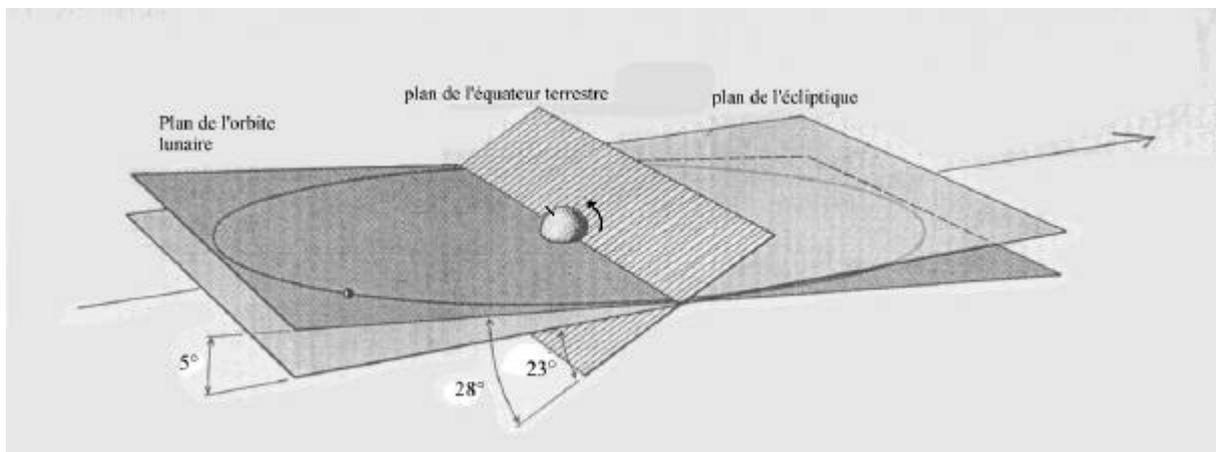
En injectant  $\cos \theta$  on obtient:

$$z = \frac{3 M_A R_T^4}{4 M_T \Delta^3} \left[ \frac{(1 - 3 \sin^2 l)(1 - 3 \sin^2 \delta)}{3} + \sin 2l \cdot \sin 2\delta \cdot \cos H + \cos^2 l \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos 2H \right] \quad (9)$$

Nous voyons donc apparaître trois termes de périodicité différente:

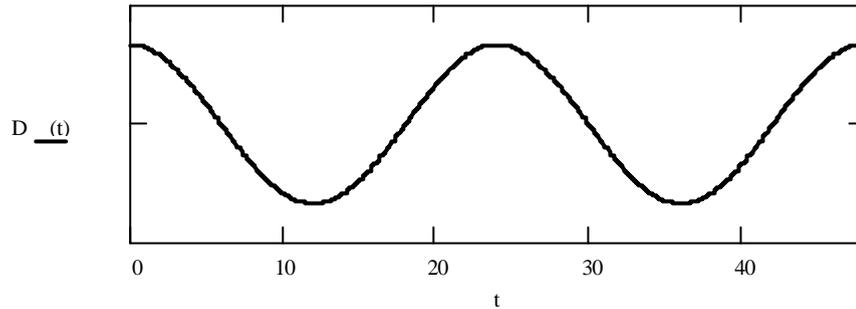
- i. Un terme en  $\cos 2H$  semi-diurne.

$H$  variant de 0 à  $2\pi$  en 24h pour le soleil et 24h 50 pour la Lune, le terme en  $\cos 2H$  aura 2 maximums en une période de rotation de l'astre. Le coefficient  $\frac{\cos^2 \delta}{\Delta^3}$  de ce terme varie lentement avec le temps. Comme  $\delta$  varie de  $23^\circ$  à  $-23^\circ$  pour le Soleil et de  $28^\circ$  à  $-28^\circ$  pour la Lune,  $\cos^2 \delta$  ne diffère de l'unité que de 20% au plus. La modulation du coefficient par le mouvement de l'astre n'a donc pas une très grande amplitude.



- ii. Un terme en  $\cos H$  diurne;

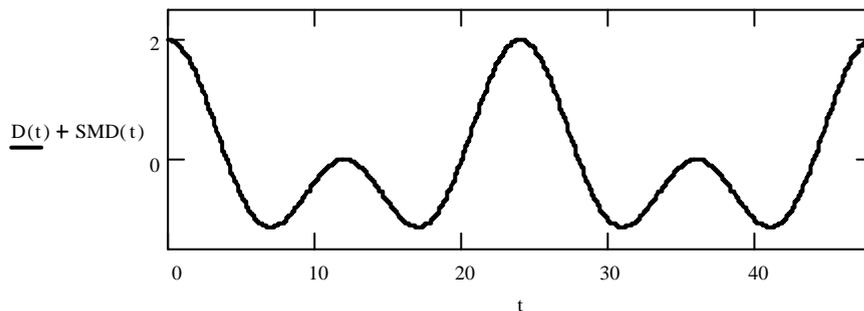
dont le coefficient  $\frac{\sin 2\delta}{\Delta^3}$  est également modulé par le mouvement de l'astre mais l'amplitude est beaucoup plus variable puisque  $\sin 2\delta$  peut varier en valeur absolue de 0 à 0,8. Ce terme s'annule lors des équinoxes mais aussi lorsque le point se trouve à l'équateur à cause du  $\sin 2\delta$ .



iii. Un terme indépendant de l'angle horaire;  
dit à longue période comme  $\sin \delta$  figure par son carré la période est de 14 jours pour le terme solaire et de 6 mois pour le terme lunaire.

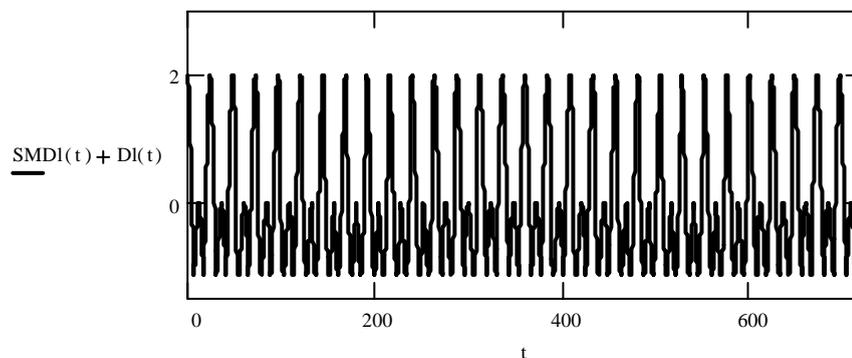
Cette méthode calculatoire nous permet de retrouver les périodicités que nous avons aperçue par un raisonnement simple, notamment la périodicité semi-diurne et diurne. Nous avons remarqué que la première ne disparaissait jamais ce qui correspond au coefficient  $\cos^2 l \cdot \cos^2 \delta$  du terme en  $\cos 2H$  de l'expression de  $z$ , alors que la seconde disparaissait quand l'astre est dans l'équateur où que le point  $y$  était, ce qui est mis en évidence par le coefficient  $\sin^2 l \cdot \sin^2 \delta$  du terme en  $\cos H$ .

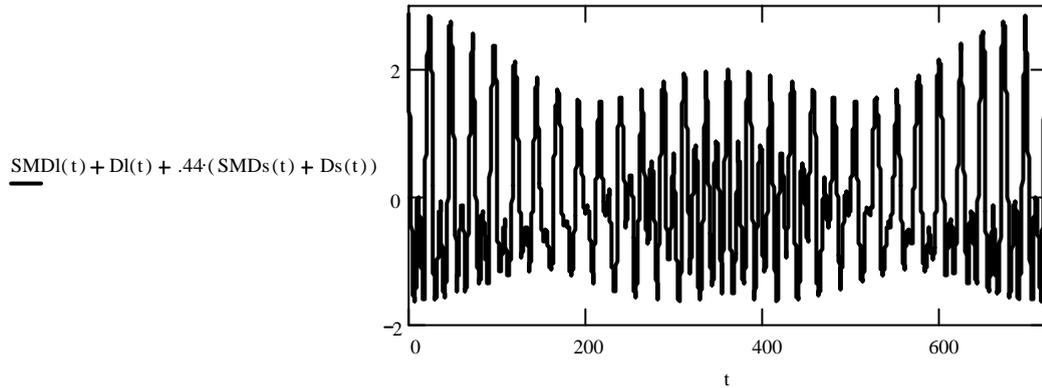
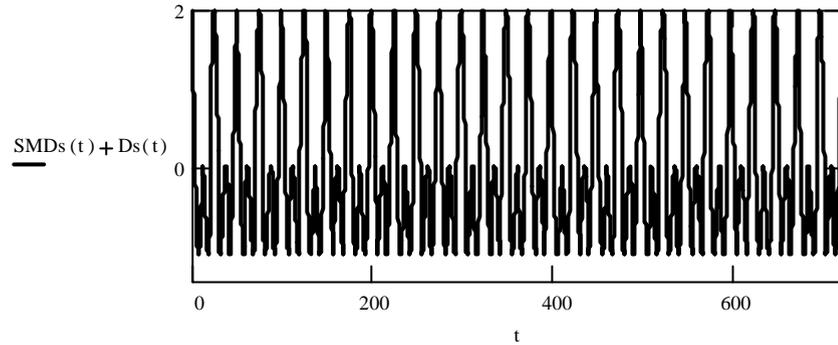
La somme des deux termes solaires sont de la forme:



### 2.2.2 Le cas Terre-Lune-Soleil.

L'analogie des graphes précédent nous donnent pour une latitude et pour un mois civil la simulation précédente. (en supposant que la Lune et le Soleil partent initialement du même méridien). Le premier schéma étant la composante lunaire d'angle horaire  $H$  et le second solaire  $H'$ , alors que le troisième est proportionnel à ce que sont les marées dues au Soleil à la Lune.





Les actions conjuguées du Soleil et de la Lune sur La Terre provoquent donc une hauteur  $z$  exprimable sous la forme de six termes : trois lunaires et trois solaires. Les termes solaires étant analogues à la relation (9) en attribuant l'exposant ' pour les termes relatifs au soleil.

Cependant comme Laplace en a fait l'hypothèse,  $z$  est de même période que la force qui l'anime, c'est-à-dire la force génératrice des marées.  $z$  représente la réponse à la force, il n'est pas en phase et n'a pas la même amplitude que celle-ci;

On peut donc écrire  $z$  sous la forme:

$$z = P^3 \left[ h_0 \cos^2 \delta \cdot \cos 2(H - \lambda) + h_1 \sin 2\delta \cdot \cos(H - \mu) + h_2 (1 - 3 \cos^2 \delta) \right] + P'^3 \left[ h'_0 \cos^2 \delta' \cdot \cos 2(H' - \lambda') + h'_1 \sin 2\delta' \cdot \cos(H' - \mu') + h'_2 (1 - 3 \sin^2 \delta') \right] \quad (10)$$

où  $P$  est le rapport de la parallaxe lunaire  $R_T/D$  à sa valeur moyenne.

Les constantes de Laplace sont déterminées à partir d'un grand nombre d'observation de la hauteur  $z$  de l'eau à des instants connus  $t$ , toutes les heures par exemple, en un lieu donné. A l'aide des relevés fait à Brest, Laplace à déterminé les constantes:

$$h_0 = 2346 \text{ mm} \quad h_1 = 108 \text{ mm} \quad h_2 = 84 \text{ mm} \quad \lambda = 48^\circ \quad \mu = 35^\circ$$

$$h'_0 = 782 \text{ mm} \quad h'_1 = 36 \text{ mm} \quad h'_2 = 28 \text{ mm} \quad \lambda' = 67^\circ \quad \mu' = 54^\circ$$

On voit que  $\frac{h_0}{h'_0} = \frac{h_1}{h'_1} = \frac{h_2}{h'_2} = 3$  ce qui signifie que la variation du niveau de l'eau due à la Lune est trois fois plus importante que celle du Soleil.

Ce résultat est en accord avec la théorie statique où l'on obtient un rapport égal à 2,2 soit  $\left(\frac{350}{160}\right)$ .

Dans l'expression (9),  $h_0$  et  $h'_0$  représente des coefficients associés au terme semi-diurne alors que  $h_1$  et  $h'_1$  correspondent au terme diurne.

$$\text{On a } \frac{h_0}{h_1} = \frac{h'_0}{h'_1} = 22$$

Selon la théorie précédente, on a le rapport du terme semi-diurne au terme diurne égale à:  $\frac{\cos^2 l}{\sin 2l} = R$  car on regarde l'influence de la latitude du lieu d'observation.

Pour pouvoir comparer avec le résultat expérimentaux, il faut se placer à la latitude de la France, soit  $l \approx 45^\circ$ , on trouve  $R = 1/2$ .

On observe une grande différence entre les deux formules, ce qui confirme la validité de celle de Laplace; qui est en accord avec le phénomène observé.

Ainsi, sur une grande partie du littoral français, la marée semi-diurne est considérablement renforcée alors que la marée diurne y conserve une amplitude très faible. La formule de Laplace y trouve alors un domaine privilégié d'application car elle fournit une bonne représentation de la marée semi-diurne.

### **Le coefficient de la marée.**

Depuis Laplace, on a beaucoup discuté de la définition du coefficient de marée.

Actuellement on le considère comme le quotient de la hauteur atteinte par la pleine mer semi-diurne au dessus du niveau d'équilibre par l'unité de hauteur de ce port (3,21m à Brest), ce qui revient à calculer les hauteurs de marée à Brest avant les coefficients.

Le coefficient est exprime en centième, 95 correspond à la moyenne des marées de vives eau et 45 correspond à la moyenne des marées de morte eau.

Il varie de 20 à 120. Les marées de coefficient compris entre 75 et 84 sont les plus fréquents: environ 17,5% soit près de une sur six.

Cette définition reste valable dans le cas où la marée diurne est négligeable vis à vis de la marée semi-diurne.

Cette condition est bien sur vérifiée à Brest mais aussi sur une grande partie du littoral français.

La notion de coefficient de marée n'est utilisé effectivement que pour la France et les pays qui suivent l'école française (Belgique, Espagne)

Les anglais font eux appel à l'amplitude de la marée à Douvre.

## **2.3 Les marées équinoxiales en France.**

Comme on vient de le voir, la formule de Laplace conduit à des résultats qui s'accommodent de façon satisfaisante avec la réalité pour les lieux où la marée diurne est faible, ce qui est notre cas.

Pour étudier les marées équinoxiales en France, on utilise la formule (10) avec les coefficients pris à Brest;

On peut négliger les termes à longues période lunaire et solaire, même si leur amplitude n'est pas très petite, car ils ont seulement pour effet, en raison de la lenteur des mouvements de l'eau qui leur

correspond, de décaler d'une même quantité les hauteurs des pleines et basses mers d'une même journée.

Nous supposons donc que, dans la formule (6), la hauteur de l'eau est exprimée uniquement par les termes semi-diurnes lunaires et solaires:

$$z \approx P^3 [h_0 \cos^2 \delta \cdot \cos 2(H - \lambda)] + P'^3 [h'_0 \cos^2 \delta' \cdot \cos 2(H' - \lambda')] \quad (11)$$

Dérivons (11) par rapport à  $\delta'$ , on a :

$$\frac{\partial z}{\partial \delta'} = P'^3 h'_0 \cos 2(H' - \lambda') \cdot 2 \sin \delta' \cdot \cos \delta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \delta'} = 0 \text{ pour } \sin \delta' = 0 \text{ donc } \delta' = 0$$

ou  $\cos \delta' = 0 \text{ donc } \delta' = \pi/2$

or  $-23^\circ < \delta' < 23^\circ$

La seule valeur de  $\delta'$  pour laquelle la hauteur  $z$  est maximale est  $\delta' = 0$ , ce qui correspond bien à une situation d'équinoxe, la déclinaison solaire étant nulle.

Ainsi, les plus grandes marées en France, se produisent à l'équinoxe.

On peut noter que les marées en France, se produisant à l'équinoxe, ont plus ou moins d'amplitudes selon les années, du fait que les phénomènes qui les produisent ne se manifestent pas toujours au même moment.

En effet, la marée la plus grande devrait se réaliser lorsque coïncident toutes les conditions:

- sysygie et quadrature.
- passage de la Lune à son périégée.
- éclipse de Lune ou de Soleil.

## 2.4 Lignes cotidales et point amphidromique.

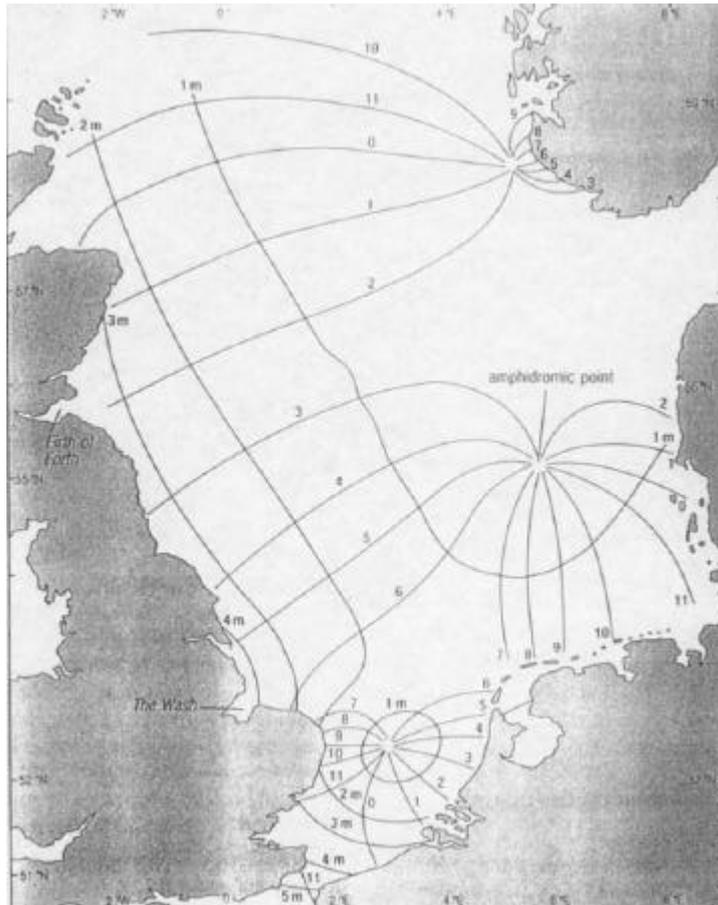
D'après la théorie statique, les marées devraient se propager vers l'ouest, c'est souvent faux (dans la Manche d'ouest en est, dans l'Atlantique nord, du sud au nord).

Ceci est dû au fait qu'il faut tenir compte de l'existence des continents et de la force de Coriolis.

On appelle ligne cotidale le lieu des points où la pleine mer se produit au même instant.

Les lignes cotidales concourent parfois toutes en un point où l'heure est indéterminée par ce que la marée  $y$  est nulle à chaque instant: ce sont les points amphidromiques autour desquels tournent les marées.

Déjà en 1836, Whewell en considérant les heures des pleines mers sur les côtes de l'Angleterre, de Belgique et des Pays Bas, avait prévu l'existence d'un tel point en mer du nord, point dont l'existence devait être vérifiée en 1840.



## 2.5 Dissipation d'énergie et conséquence.

La Terre effectuant une rotation par jour, un courant de marée se déplace sur le fond des océans.

Ce phénomène de friction conduit à une perte d'énergie mécanique sous forme de chaleur.

La majorité de cette énergie est en fait perdue dans les mers peu profondes et près des rivages, là où les marées butent contre les continents.

Cette dissipation d'énergie diminue l'énergie de rotation de la Terre de telle sorte que la longueur du jour augmente d'environ 0,002 seconde par siècle.

La Terre exerce sur la Lune des marées 20 fois plus hautes, il en résulte une énorme dissipation d'énergie, la période de rotation de cette dernière décroît jusqu'à ce qu'elle montre toujours la même face à la Terre.

La stabilité de cette rotation synchrone est due à la figure irrégulière de la Lune qui est légèrement allongé en direction de la Terre.

Le système Terre-Lune peut, en première approximation être considéré comme isolé, son moment cinétique doit donc rester constant.

Les marées ralentissent la rotation de la Terre, donc son moment cinétique.

Pour conserver le moment total, le moment de la Lune doit croître.

La Lune s'éloigne de la Terre d'environ 3 cm par an.

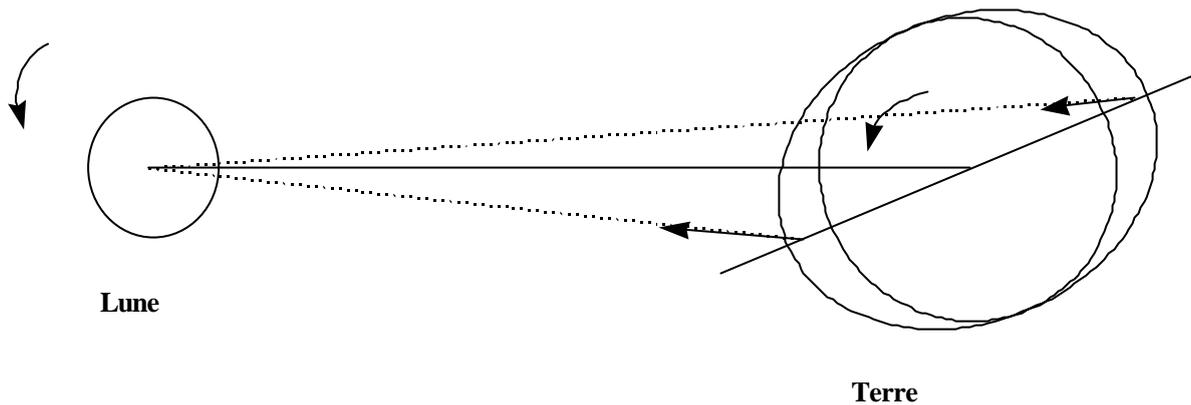
D'après la troisième loi de Kepler, on a  $\frac{P^2}{a^3} = \text{cte}$  avec  $P$  = période de révolution de la Lune et  $a$  le rayon de l'orbite lunaire.

Comme  $a$  augmente,  $P$  doit augmenter.

Ainsi, le mois lunaire doit croître. Dans un futur lointain, le mois et le jour deviendront de la même longueur, égaux à environ 50 de nos jours actuels.

En fait la Terre entraîne les océans dans la rotation et l'axe des renflements n'est pas exactement dirigé suivant la direction Terre-Lune, mais se trouve toujours un peu en avance sur cette direction.

Il s'ensuit que les masses océaniques sont soumises de la part de la Lune à un couple retardateur qui, par friction sur le fond des océans, est transmis à la Terre, d'où le ralentissement séculaire de la rotation terrestre et l'augmentation concomitante de la durée du jour dont nous avons déjà parlé.



Par contre, si la période de révolution lunaire était inférieure à 24h (période de rotation de la Terre), la direction Terre-Lune se déplacerait plus vite que l'axe des renflements et l'action de la Lune produirait, au contraire, un couple accélérateur sur la Terre, et la durée du jour diminuerait.

On connaît des exemples de ce genre dans le système solaire, par exemple Mars et son satellite Phobos.

A noter que lorsque la période de révolution du satellite est très exactement égale à la période de rotation de la planète mère, le couple s'annule: le satellite est alors dit en orbite synchrone.

## **Conclusion.**

Comme nous avons vu, les effets de marées ont des implications considérables pour la vie humaine et animale, leur prédiction est satisfaisante à des endroits bien précis. En revanche, une théorie globale harmonique est au point mais l'intégration des équations nécessite des calculateurs puissants et une bien meilleure connaissance du relief sous marin que celle que nous possédons. Tout cela pour le service des différents corps de marine, d'électricité de France (Usine marée motrice), ou même, plus inattendu le CERN pour les accélérateurs de particules.

Ces effets s'appliquent de manière générale dans l'univers et permettent par exemple d'expliquer la forme de certaines galaxies, l'origine du volcanisme sur Io (satellite de Saturne) et la limite de Roche (où comment on explique les anneaux de Saturnes et pourquoi des astres ne peuvent pas être trop près les uns des autres sans éclater).

## **Bibliographie.**

A.BRAHIC - Cours d'astrophysique et planétologie, 1997-1998.

J.BOUTELOUP - "Vagues, marées, courant marins. Que sais-je? n°438, P.U.F.

M.DARS, G.BESSERO, D.GUEVEL - "Les marées". Editions de l'ENSTA.

P.GOLDREICH - Scientific Américan, avril1972: "Tides and the Earth-Moon système".

D.LEDERER - "Les marées, la Terre, la Lune et le Soleil".

G.PASCOLI - "Elements de mécanique céleste". Masson.

Encyclopédie BRITANICA - "Tides".